Chap ③

Intégrat° Numérique.

➡ Formules de quadrature :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)}_{\text{Valeur approché de } I} + \underbrace{E_n(f)}_{\text{l'erreur de quadrature}}$$

avec $\begin{cases} x_i \text{ Les noeuds} \\ A_i \text{ des poids} \end{cases}$

➡ Methodes de Newton-cotes :

- on a $x_i = a + ih$; $h = \frac{b-a}{n}$ et $i = 0, 1, \dots n$
- on remplace $f(x)$ par son polynôme d'interpolat° de lagrange relativement aux pts $(x_0 \dots x_n)$

$\forall x \in [a,b]$ $f(x) = P_n(x) + e_n(x)$

$$I = \int_a^b f(x) = \int_a^b P_n(x)\,dx + \int_a^b e_n(x)\,dx$$

avec $\int_a^b P_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)\,dx$

et on pose $\int_a^b L_i(x)\,dx = A_i^{(n)}$

Cl : $I = \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} f(x_i) + \int_a^b e_n(x)\,dx$

avec $E_n(f) = \int_a^b e_n(x)\,dx$

et $A_i^{(n)} = A_{n-i}^{(n)} = \frac{(-1)^{n-i} \times h}{i!(n-i)!} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (u-j)\,du$

Rq 1) :

$$I = \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} f(x_i)$$

- pour $n = 1$ on obtient la formule des **Trapèzes**

$A_0^{(1)} = A_1^{(1)} = h\int_0^1 u\,du = \frac{h}{2}$

Donc $\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$

- pour $n = 2$ on obtient la formule de **Simpson**

$A_0^{(2)} = A_2^{(2)} = \frac{h}{2}\int_0^2 (u-1)(u-2)\,du = \frac{h}{3}$

et $A_1^{(2)} = -h\int_0^2 u(u-2)\,du = \frac{4h}{3}$

Donc $\sum_{i=0}^{n} A_i^{(2)} f(x_i) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$

Rq 2) : $I = \int_0^1 f(x)\,dx = A f(0) + B\left(\frac{1}{3}\right) + C f(1)$

donnée : I exacte pour un poly. de degré 2

quest° : trouver A, B et C

(Voir TD3 exo1)

. Erreur d'intégrat° :

* Pour la formule des Trapèzes

Si $f \in C^2([a,b])$ avec $h = b-a$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)\right) - \frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi) \quad \xi \in [a,b]$$

tq : $\mathcal{E}_1(f) = -\frac{h^3}{12} f^{(2)}(\xi)$

* Pour la formule de Simpson

Si $f \in C^4([a,b])$ avec $h = \frac{b-a}{2}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

tq : $\mathcal{E}_2(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi) \quad \xi \in [a,b]$

➡ Meth. de Newton-Cotes composites

. principe : on subdivise l'intervalle d'integrat° en N ~~sous~~ intervalle (N donnée) et appliquer sur chacun d'eux la meth. des Trapèzes ou de simpson.

On considère un subdivision de l'integralle $[a,b]$ en N intervalles égaux :

$t_i = a + ih$; $i = 0, 1, \dots N$ et $h = \frac{b-a}{N}$

* formules des Trapèzes composites :

Si $f \in C^2([a,b])$ avec $h = \frac{b-a}{N}$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(t_i) + f(b)\right] - \frac{b-a}{12} h^2 f^{(2)}(\xi)$$

tq : $\mathcal{E}_1(f) = -\frac{b-a}{12} h^2 f^2(\xi) \quad \xi \in [a,b]$

Rq :

$$\left| -\frac{b-a}{12} h^2 f^{(2)}(\xi) \right| \leq k\,h^2$$

avec $k = \frac{1}{12}(b-a) \max_{x \in [a,b]} |f^2(x)|$ (ordre 2)

* formules de Simpson composites :

Si $f \in C^4([a,b])$ avec $h = \frac{b-a}{N}$ et $n = \frac{N}{2}$ (Donnée)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(t_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(t_{2i-1}) + f(b)\right] - \frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi) \quad \xi \in [a,b]$$

tq : $\mathcal{E}_2(f) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi)$

Rq :

$$\left| -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi) \right| \leq k\,h^4$$

avec $k = \frac{1}{180}(b-a) \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|$ (ordre 4)